

2021 年高三一模数学试题答案

一、选择题：DBCA CBCD

二、选择题： ABD BC AB **ACD**

三、填空题：13. 3.5 14. 12 15. 1; $e^3 - e$ 16. $\frac{1}{3}$

四、解答题：

17. **证明：**(1) 因为 $a_{n+1} - 2 = \frac{3}{2}a_n - 3 = \frac{3}{2}(a_n - 2)$,2 分

所以 $\{a_n - 2\}$ 是以 $a_1 - 2 = -\frac{7}{4}$ 为首项, 以 $\frac{3}{2}$ 为公比的等比数列

所以数列 $\{a_n - 2\}$ 是等比数列.....4 分

解：(2) 由 (1) 得 $a_n - 2 = -\frac{7}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$,5 分

所以 $b_n = 2^{n+3} - 14 \cdot 3^{n-1}$ 6 分

因为 $b_{n+1} - b_n = -14 \cdot 3^n - 2^{n+4} + 14 \cdot 3^{n-1} - 2^{n+3}$

$= 2^{n+3} - 28 \cdot 3^{n-1} < 2^{n+3} - 3^{n+2} = 8 \cdot 2^n - 9 \cdot 3^n < 9(2^n - 3^n) < 0$,8 分

所以 $b_{n+1} < b_n$, 所以 $\{b_n\}$ 单调递减,9 分

所以 b_n 的最大值为 $b_1 = 2$ 10 分

18. **解：**(1) **法 1：** 根据题意，

由 $2\sqrt{3}\sin B + \sqrt{3}b\cos A = \sqrt{3}b$ 得 $a\sin B + \sqrt{3}b\cos A = \sqrt{3}b$ 2 分

由正弦定理得： $\sin A\sin B + \sqrt{3}\sin B\cos A = \sqrt{3}\sin B$,3 分

化简得 $\sin A + \sqrt{3}\cos A = \sqrt{3}$ 4 分

联立 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 解得 $\cos A = \frac{1}{2}$, $\cos A = 1$ (舍去)5 分

所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 6 分

法 2: 根据题意, $2\sin B + b\cos A = b$, 得 $\frac{2\sin B}{b} + \cos A = 1$ 2 分

由正弦定理可得 $\frac{2\sin A}{a} + \cos A = 1$, 即 $\frac{2\sin A}{2\sqrt{3}} + \cos A = 1$

得: $\sin A + \sqrt{3}\cos A = \sqrt{3}$,4 分

$2(\frac{1}{2}\sin A + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos A) = \sqrt{3}$, $\sin(A + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 5 分

角 A 为三角形内角, $\therefore A + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

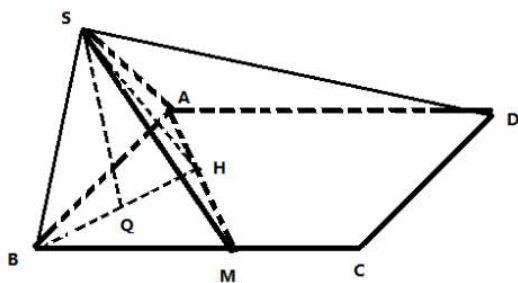
所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 6 分

(2) 由 $\sin C = 2\sin B$, 得 $c = 2b$, 又 $A = \frac{\pi}{3}$, $a = 2\sqrt{3}$,8 分

由余弦定理可得: $a^2 = b^2 + c^2 - bc$, 解得: $b = 2$, $c = 4$,10 分

所以, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = 2\sqrt{3}$ 12 分

19.解: (1) **法 1:**



取 AM 中点为 H, 连结 HS, HB,

因为 $\angle ABM = \frac{\pi}{2}$ 且 $AB = BM = 1$, 所以 $\triangle ABM$ 为等腰直角三角形, 同理 $\triangle ASM$ 也为等腰直角三

角形, HS, HB 均垂直 AM 于 H, 所以 $AM \perp$ 平面 BSH,

所以二面角 $S-AM-B$ 的平面角为 $\angle BHS = \frac{\pi}{3}$,2 分

因为 $SH=BH=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以三角形 SHB 为正三角形,

取 BH 的中点 Q , 连结 SQ , 则 SQ 垂直与 BH , 得 $SQ=\frac{\sqrt{6}}{4}$,3 分

因为 $AM \perp$ 平面 BSH , 所以 AM 垂直于 SQ , 又 $SQ \perp BH$,

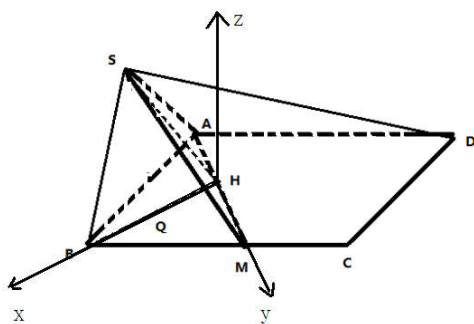
所以 SQ 垂直于底面 $ABCD$,

连结 AQ , $\angle SAQ$ 为 AS 与平面 $ABCD$ 所成角.....5 分

因为 $AS=1$, $\sin \angle SAQ = \frac{SQ}{AS} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

所以 AS 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$ 6 分

法 2: 取 AM 中点为 H , 连接 SH, BH , 因为 $\square AMS$ 和 $\square AMB$ 均为等腰直角三角形, 所以 SH, BH 均垂直于 AM , 所以 $AM \perp$ 平面 BSH 1 分



以 H 为坐标原点, HB, HM 分别为 x 轴, y 轴建系如图: 则点 S 在坐标平面 xOz 内,

设其坐标为 $S(a, 0, c)$, $(a > 0, c > 0)$ 由 $\square AMS$ 为等腰直角三角形且 $AS = 1$,

得 $M(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $A(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, 则 $\overrightarrow{AS} = (a, \frac{\sqrt{2}}{2}, c)$, $\overrightarrow{AM} = (0, \sqrt{2}, 0)$ 2 分

因为 $|\overrightarrow{AS}|=1$, 所以 $a^2+c^2=\frac{1}{2}$ ①,3 分

设平面 ASM 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AS} = ax + \frac{\sqrt{2}}{2}y + cz = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AM} = \sqrt{2}y = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \vec{m} = (-c, 0, a)$$

取设平面 ABM 的法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$,

因为二面角 $B-AM-S$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$,

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{1}{2} \quad \text{②} \quad \text{.....4 分}$$

$$\text{由①②得} \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ c = \frac{\sqrt{6}}{4} \end{cases}, \quad \text{.....5 分}$$

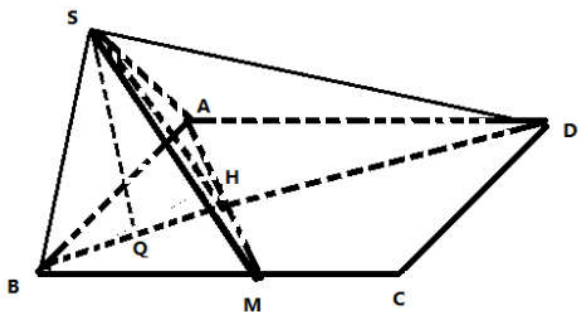
$$\text{所以 } \overrightarrow{AS} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4} \right)$$

设 AS 与平面 $ABCD$ 所成的角 θ 的正弦值为

$$\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AS}, \vec{n} \rangle| = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4}}{1 \times \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{所以 } AS \text{ 与平面 } ABCD \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{\sqrt{6}}{4}. \quad \text{.....6 分}$$

(2)



法 1: 在平面 SAM 内作 $SH \perp AM$ 连结 BH, DH, 则 $BH \perp AM$,

又因为 $SD \perp AM$, $\therefore AM \perp$ 平面 SHD7 分

所以 $AM \perp DH$, 又因为 $AM \perp BH \therefore AM, BH, DH$ 都在平面 ABCD 内

所以 B, H, D 三点共线.9 分

$AM \perp BD$

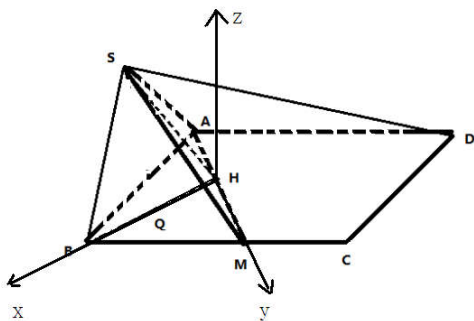
因为矩形 ABCD 中, $BC=2AB=2$

$\therefore \triangle ABM$ 与 $\triangle DAB$ 相似 $\therefore \frac{AB}{BM} = \frac{AD}{AB}$, 解得 $BM = \frac{1}{2}$ 11 分

所以 $MC = BC - BM = \frac{3}{2}$12 分

法 2:

作 $BH \perp AM$ 于 H, 则 $SH \perp AM$ 所以 $AM \perp$ 平面 BSH7 分



以 H 为坐标原点, HB, HM 分别为 x 轴, y 轴建系如图: 则点 S 在坐标平面 xOz 内,

设其坐标为 $S(a, 0, c)$, 设 $D(x, y, 0)$, 则 $\overrightarrow{DS} = (a - x, -y, c)$

取 AM 的方向向量为 $\vec{p} = (0, 1, 0)$

因为 $SD \perp AM$ 所以 $\overrightarrow{DS} \cdot \vec{p} = -y = 0$ ，得 $y = 0$ ，

即 D 在 x 轴上， 所以 B, H, D 三点共线9 分

以下解法同法一.

20. 解：（ I ）由题意知收入提高的有 260 户，未种植 A 作物的有 100 户，得 2×2 列联表

	种植 A 作物的数量	未种植 A 作物的数量	合计
收入提高的数量	180	80	260
收入未提高的数量	20	20	40
合计	200	100	300

.....2 分

经计算得
$$K^2 = \frac{300 \times (180 \times 20 - 80 \times 20)^2}{200 \times 100 \times 260 \times 40} = \frac{75}{13} \approx 5.769 > 5.024,$$

所以有 97.5% 的把握认为收入提高与种植 A 作物有关。4 分

（2）设 A_i, B_i, C_i 表示第 i 次种植作物 A,B,C 的事件，其中 $i=1,2,3$ ，由已知条件得：

$$P(B_2) = \frac{1}{3}, P(A_3 | B_2) = \frac{1}{4}, P(C_3 | B_2) = \frac{3}{4};$$
5 分

$$P(C_2) = \frac{2}{3}, P(A_3 | C_2) = \frac{2}{5}, P(B_3 | C_2) = \frac{3}{5};$$

因为第一次必种植 A，则随机变量 x 的取值为 1,2.....6 分

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(C_2 B_3) + P(B_2 C_3) = P(B_3 | C_2) \cdot P(C_2) + P(C_3 | B_2) \cdot P(B_2) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{20} \end{aligned}$$
8 分

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(C_2 A_3) + P(B_2 A_3) = P(A_3 | C_2) \cdot P(C_2) + P(A_3 | B_2) \cdot P(B_2) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{20} \end{aligned}$$
10 分

所以 x 的分布列为

X	1	2
P	$\frac{13}{20}$	$\frac{7}{20}$

.....11 分

$$E(X) = 1 \times \frac{13}{20} + 2 \times \frac{7}{20} = \frac{27}{20} \text{12 分}$$

21. 解: (1) 因为曲线 $E_2: y^2 = 4x$ 的焦点恰好也是 F_2 , 所以椭圆中 $c=1$, $2c=2$1 分

因为 $\square MNF_2$ 的面积为 3, 所以 $|MN|=3$ 2 分

$$\text{所以} \begin{cases} c=1 \\ \frac{2b^2}{a}=3 \end{cases} \text{得} \begin{cases} a=2 \\ b=\sqrt{3} \\ c=1 \end{cases}, \text{所以椭圆方程为} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \text{4 分}$$

(2) 因为 O 为 F_1, F_2 的中点, 所以 O 到 l 的距离为 F_1 到 l 距离的一半,

又因为 $\square ABF_1$ 与 $\square OCD$ 的面积相等, 所以 $|CD| = 2|AB|$,5 分

$\because F_2(1, 0)$, 设 l 的方程为 $y = k(x-1)$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$ 则:

$$\begin{cases} y = k(x-1) \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases} \text{得: } (3+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0 \text{6 分}$$

$$\text{得: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3+4k^2} \\ x_1x_2 = \frac{4k^2-12}{3+4k^2} \end{cases}, \text{由两点间距离公式可得} |AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2|$$

$$\text{所以} |AB| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = 4 - \frac{4k^2}{3+4k^2}; \text{8 分}$$

$$\text{又因为} \begin{cases} y = k(x-1) \\ y^2 = 4x \end{cases} \text{得: } k^2x^2 - (2k^2+4)x + k^2 = 0 \text{9 分}$$

$$\text{得: } \begin{cases} x_3 + x_4 = 2 + \frac{4}{k^2} \\ x_3x_4 = 1 \end{cases}, \text{所以} |CD| = x_3 + x_4 + 2 = 4 + \frac{4}{k^2}; \text{10 分}$$

因为 $\frac{|CD|}{|AB|} = 2$ ，所以 $k = ? \frac{\sqrt{6}}{2}$ 12 分

22. 解: (1) 当 $a = -1$ 时, $f(x) = -x + \ln x + 1$, 定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x} \quad \text{.....1 分}$$

令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $x > 1$.

因此, 函数 $y = f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, 单调递减区间为 $(1, +\infty)$;2 分

所以 $f_{\max}(x) = f(1) = 0$3 分

(2) 令
$$g(x) = f(x) - f'(x) = ax + \ln x + 1 - a - \frac{1}{x}, (x > 0) \quad ,$$

$$g'(x) = a + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{ax^2 + x + 1}{x^2} \quad \text{.....4 分}$$

若 $a \geq 0$, 存在 $g(e) = a(e-1) + (2 - \frac{1}{e}) > 0$, 与 $g(x) = f(x) - f'(x) \leq 0$ 恒成立矛盾,

所以必有 $a < 0$,5 分

$ax^2 + x + 1 = 0$ (*), 方程的 $\Delta > 0, x_1 \square x_2 = \frac{1}{a} < 0$, 所以方程必有一正根记 x_2

所以函数 $g(x)$ 在 $(0, x_2)$ 单调递增, 在 $(x_2, +\infty)$ 单调递减,

若满足条件必有 $g(x)_{\max} = g(x_2) \leq 0$, 注意到 $g(1) = 0$ 6 分

则有 $x_2 = 1$, 代入*式, 解得 $a = -2$. 所以 a 的取值集合为 $\{-2\}$7 分

(3) 因为 $F(x) = \ln x$, 设两切点为 $A(t, \ln t)$, $B\left(\frac{1}{t}, -\ln t\right)$,

不妨设 A 在 B 的右边, 则 $t > 1$ 因为

$$F'(x) = \frac{1}{x}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

所以 A, B 两点处的切线方程分别为 $y = \frac{1}{t}x + \ln t - 1, y = tx - \ln t - 1,$

令 $\frac{1}{t}x + \ln t - 1 = tx - \ln t - 1$, 解得 $x_0 = \frac{2t}{t^2 - 1} \ln t, y_0 = \frac{(t^2 + 1) \ln t}{t^2 - 1} - 1 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

因为 $t > 1$, 所以 $x_0 = \frac{2t}{t^2 - 1} \ln t > 0,$

要证明 $y_0 = \frac{(t^2 + 1) \ln t}{t^2 - 1} - 1 > 0$

即证明 $\frac{(t^2 + 1) \ln t}{t^2 - 1} > 1$, 因为 $t^2 > 1$ 即证 $\ln t > \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$

设 $h(t) = \ln t - \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} (t > 1)$, 则 $h'(t) = \frac{(t^2 - 1)^2}{t(t^2 + 1)^2} > 0 (t > 1),$

所以 $h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数, 所以 $h(t) > h(1) = 0$, 则 $\ln t > \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

所以 $y_0 = \frac{(t^2 + 1) \ln t}{t^2 - 1} - 1 > 0,$

故点 P 一定落在第一象限.....12 分